2018-2019 Cebir II Arasınav Cevap Anahtarı

1) a) $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ halkası birimli midir?

$\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x \odot e = e \odot x = x$ o.ş. $e \in \mathbb{Z}$ var mıdır?

$x \odot e = x \Rightarrow xe + x + e = x \quad \wedge \quad e \odot x = x \Rightarrow ex + e + x = x$

$\Rightarrow xe + e = 0 \qquad \Rightarrow ex + e = 0$

$\Rightarrow (x+1)e = 0 \qquad \Rightarrow e(x+1) = 0$

$\Rightarrow e = 0 \qquad \Rightarrow e = 0$

olup halka birimlidir ve halkanın birimi $0 \in \mathbb{Z}$ dir

b) $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ değişmeli midir?

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x \odot y = y \odot x$ olur mu?

$x \odot y = xy + x + y = \underbrace{yx + y + x}_{\mathbb{Z},\ "+"\text{ ve }"\cdot"\text{ göre değişmeli}} = y \odot x$ olup halka değişmelidir

c) $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ sıfır bölensiz midir?

Bunun için halkanın sıfırından farklı keyfi bir eleman almalıyız. O halde öncelikle halkanın sıfırını bulalım.

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x \oplus 0_{(\mathbb{Z},\oplus,\odot)} = 0_{(\mathbb{Z},\oplus,\odot)} \oplus x = x$ o.ş.

$0_{(\mathbb{Z},\oplus,\odot)} \in \mathbb{Z}$ bulmalıyız

$x \oplus 0_{(\mathbb{Z},\oplus,\odot)} = x \Rightarrow x + 0_{(\mathbb{Z},\oplus,\odot)} + 1 = x \quad \wedge \quad 0_{(\mathbb{Z},\oplus,\odot)} \oplus x = x \Rightarrow 0 + x + 1 = x$

$\Rightarrow 0_{(\mathbb{Z},\oplus,\odot)} = -1 \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow 0_{(\mathbb{Z},\oplus,\odot)} = -1 \in$

Halkanın sıfırı -1 dir O halde

$\forall x \neq -1$ için $x \odot y = -1$ olsun.

$\Rightarrow xy + x + y = -1$

$\Rightarrow x(y+1) + y + 1 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(y+1) = 0$

$\Rightarrow (y+1) = 0$

$\Rightarrow (y = -1)$ yani $y = 0_{(\mathbb{Z},\oplus,\odot)}$ olup halka

sıfır bölensizdir

2) a) $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ için ekok $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a$ ise

$\bigcap_{i=1}^{n} (a_i) = (a)$ dır. Çünkü ideallerin arakesiti de bir ideal ve $\mathbb{Z}$ deki her ideal bir temel ideal olduğundan,

$\bigcap_{i=1}^{n} (a_i) = (c)$ de bir temel idealdir. Şimdi c'nin a_i lerin ekok olarak alınabileceğini gösterelim

$c \in \bigcap_{i=1}^{n} (a_i) \Rightarrow \forall i = 1, 2, \ldots, n \;;\; c \in (a_i)$

$\Rightarrow \forall i = 1, 2, \ldots, n \;;\; a_i \mid c$ olduğundan, c'nin a_i lerin bir ortak katı olduğu anlaşılır

Eğer b, a_i lerin herhangi bir ortak katı ise $\forall i = 1, 2, \ldots, n$)

$a_i \mid b \Rightarrow b \in (a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow b \in \bigcap_{i=1}^{n} (a_i) = (c)$

$\Rightarrow c \mid b$ bulunur O halde

ekok tanımından $c =$ ekok $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dır

b) R tamlık bölgesi olsun. $R[x]$'in sıfır bölensiz olduğunu gösterelim. Keyfi $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, $(a_m \neq 0)$ ve $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ $(b_n \neq 0)$ alalım. O halde $c_{m+n} = a_{m+n} b_0 + \cdots + a_m b_n + \cdots + b_{m+n}$ dır $i > m$ için $a_i = 0$ ve $j > n$ için $b_j = 0$ olduğundan $c_{m+n} = a_m b_n$ bulunur R tamlık bölgesi ve $a_m \neq 0, b_n \neq 0$ olduğundan $a_m . b_n \neq 0$. Yani $c_{m+n} \neq 0$ olur Yani $R[x]$ den alınan $f(x) \neq 0$ ve $g(x) \neq 0$ polinomları için $f(x) . g(x) \neq 0$ olup $R[x]$ sıfır bölensizdir

3) $\mathbb{Z}_7[x]$ halkası cisim olduğundan $g(x)$ ve $f(x)$ polinomlara bölme algoritması uygulanabilir

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4+2x^3+6x^2+4x+5 & 3x^2+2 \\
\cline{2-2}
-4x^4 \mp 5x^2 & 6x^2+3x+5 \\
\cline{1-1}
\quad 2x^3+x^2+4x+5 & \\
\quad -2x^3 \mp 6x & \\
\cline{1-1}
\qquad x^2+5x+5 & \\
\qquad -x^2 \mp 3 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 5x+2 &
\end{array}
$$

$$4x^4+2x^3+6x^2+4x+5=(3x^2+2)(6x^2+3x+5)+5x+2$$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^2+2 & 5x+2 \\
\cline{2-2}
-3x^2 \mp 4x & 2x+2 \\
\cline{1-1}
3x+2 & \\
-3x \mp 4 & \\
\cline{1-1}
\qquad 5 &
\end{array}
$$

$$3x^2+2=(5x+2)(2x+2)+5$$

$$\begin{array}{r|l} 5x+2 & 5 \\ \cline{2-2} -5x & x \\ \hline 2 & \end{array}$$

$5x+2 = 5.x+2$

$5 = 2.2+1$

$2 = 2.1+0$

$d(x) = 1$

$1 = 5 - 2.2$

$1 = 5 - 2(5x+2-5x)$

$1 = 5(1+2x) - 2.(5x+2)$

$1 = (f(x) - (2x+2)(5x+2))(1+2x) - 2(5x+2)$

$1 = (1+2x)f(x) - 5x+2\,[(2x+2)(1+2x)+2]$

$1 = (1+2x)f(x) - 5x+2\,[4x^2+6x+4]$

$1 = (1+2x)f(x) - [g(x) - f(x)(6x^2+3x+5)][4x^2+6x+4]$

$1 = (1+2x+3x^4+x^3+3x^2+5x^3+4x^2+5x+6x^2+2x+6)f(x)$
$\quad - (4x^2+6x+4)g(x)$

$1 = (3x^4+6x^3+6x^2+2x)f(x) + (3x^2+x+3)g(x)$

$s(x) = 3x^4+6x^3+6x^2+2x$

$t(x) = 3x^2+x+3$

4) a) $K_b \neq \emptyset$: $0_R \in R$ ve $0_R.b = 0_R \Rightarrow 0_R \in K_b$ olup $K_b \neq \emptyset$

$K_b \subseteq R$: Tanımdan açıktır

- $\forall x,y \in K_b$ için $x.b = 0_R$ $y.b = 0_R$

$(x-y).b = xb - yb = 0_R - 0_R = 0_R \Rightarrow x-y \in K_b$

- $\forall r \in R$ $\forall x \in K_b$ için $xb = 0_R$

$(rx)b = r(xb) = r.0_R = 0_R \Rightarrow rx \in K_b$ sol ideal

- $\forall r \in R$ $\forall x \in K_b$ için

$(xr)b = x(rb) \overset{?}{=}$ $(xr)b = 0_R$ diyemeyiz Sağ ideal değildir

O halde ideal değildir

b) F keyfi bir cisim olsun. O halde $x \neq 0_F$ o.ü $\forall x \in F$ için $x^{-1} \in F$ dir Yani $x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1_F$ o.ş $x^{-1} \in F$ vardır. $y = x^{-1}$ alınırsa $x = xyx$ olup x regüler elemandır

$x = 0_F$ ise $x = xyx$ o.ş $y \in F$ vardır x regüler elemandır

F'in her elemanı regüler olduğundan F regüler halkadır

F keyfi old. her cisim bir regüler halkadır

5) a) $f: R \longrightarrow S$ epimorfizma olsun.

I, S'nin keyfi bir ideali olsun. $f^{-1}(I) = \{x \in R \mid f(x) \in I\}$ kümesinin de R'nin ideali olduğunu gösterelim.

- $\forall x, y \in f^{-1}(I)$ için $f(x) \in I$ ve $f(y) \in I$

$$f(x-y) \overset{f \text{ homomorfizma}}{=} \underbrace{f(x)}_{\in I} - \underbrace{f(y)}_{\in I} \in I \Rightarrow x-y \in f^{-1}(I)$$

- $\forall r \in R$, $\forall x \in f^{-1}(I)$ için $f(x) \in I$

$$f(rx) \overset{f \text{ homomorfizma}}{=} \underbrace{f(r)}_{\in S} . \underbrace{f(x)}_{\in I} \in I \quad I, S\text{'nin ideali} \Rightarrow rx \in f^{-1}(I)$$

$$f(xr) = \underbrace{f(x)}_{\in I} . \underbrace{f(r)}_{\in S} \in I \quad I, S\text{'nin ideali} \Rightarrow xr \in f^{-1}(I)$$

$f^{-1}(I)$, R'nin idealidir

b) J, R'nin keyfi bir ideali olsun

$f(J) = \{f(x) \in S \mid x \in J\}$'nin S'nin ideali old. gösterelim

- $\forall f(x_1), f(x_2) \in f(J) \Rightarrow x_1, x_2 \in J \Rightarrow x_1 - x_2 \in J$

$$f(x_1) - f(x_2) = f(\underbrace{x_1 - x_2}_{x_1 - x_2 \in J}) \in f(J)$$

- $\forall s \in S$ $\forall f(x) \in f(J) \Rightarrow x \in J$

$$s.f(x) \overset{f \text{ örten } f(r)=s \text{ ∃ } r \in R}{=} f(r) f(x) = f(\underbrace{rx}_{\in J}) \in f(J); \quad r \in R, x \in J, rx \in J \quad J \text{ ideal.}$$

$$f(x).s = f(x).f(r) = f(xr) \in f(J)$$

$f(J)$, S'nin idealidir